國 立 雲 林 科 技 大 學

107 學年度第二學期工學院會考試題

時間：10:10~12:00
科目：微積分
班級：

※本次測驗禁止使用電子計算機

1. 求下列不定積分： $(7\% \times 6 = 42\%)$

(a) $\int \frac{x^3 - 4x^2 - 4x + 20}{x^2 - 5} dx$

(b) $\int \frac{2}{\sqrt{-x^2 + 4x}} dx$

(c) $\int e^{-x} \cos 2x \, dx$

(d) $\int \ln(4 + x^2) dx$

(e) $\int \sin^3 2\theta \sqrt{\cos 2\theta} \, d\theta$

(f) $\int \frac{9x^2 + 2}{3x^3 + x} dx$

2. 求 $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}} dx$。 (8%)

3. 求以 $y^2 = 2x$ 及 $x = 2y$ 的圖形為界的區域對 y-軸旋轉所得旋轉體的體積。 (10%)

4. 求以 $y = 2x^2$ 及 $y = 4 - 2x^2$ 的圖形為界的區域對 $x = 2$ 旋轉所得旋轉體的體積。 (10%)

5. 求 $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$ 的圖形在 $0 \le x \le \sqrt{3}$ 的弧長。 (10%)

6. 求極限 $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$，其中 a 是一個常數。 (10%)

7. 求瑕積分 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 + x} dx$。 (10%)

《試題完》

國立雲林科技大學 107 學年度第一學期工學院微積分統一會考

標準答案試算表

No. 1

1.

(a) $\int \frac{x^3-4x^2-4x+20}{x^2-5}dx = \int\left(x-4+\frac{x}{x^2-5}\right)dx = \frac{x^2}{2}-4x+\frac{1}{2}\ln\left|x^2-5\right|+C$

(b) $\int \frac{2}{\sqrt{-x^2+4x}}dx = \int \frac{2}{\sqrt{2^2-(x-2)^2}}dx = 2\arcsin\left(\frac{x-2}{2}\right)+C$

(c) Let $dv=e^{-x}dx$ and $u=\cos 2x \rightarrow v=-e^{-x}$ and $du=-2\sin 2x\,dx$

$$\int e^{-x}\cos 2x\,dx = -e^{-x}\cos 2x - 2\int e^{-x}\sin 2x\,dx \qquad (1)$$

Let $dv=e^{-x}dx$ and $u=\sin 2x \rightarrow v=-e^{-x}$ and $du=2\cos 2x\,dx$

$$\int e^{-x}\sin 2x\,dx = -e^{-x}\sin 2x + 2\int e^{-x}\cos 2x\,dx \qquad (2)$$

Substitute equation (2) into equation (1).

$$\int e^{-x}\cos 2x\,dx = -e^{-x}\cos 2x - 2\left[-e^{-x}\sin 2x + 2\int e^{-x}\cos 2x\,dx\right]$$

$$5\int e^{-x}\cos 2x\,dx = -e^{-x}\cos 2x + 2e^{-x}\sin 2x$$

$$\int e^{-x}\cos 2x\,dx = \frac{e^{-x}(-\cos 2x+2\sin 2x)}{5}+C$$

(d) Let $dv=dx$ and $u=\ln(4+x^2) \rightarrow v=x$ and $du=\frac{2x}{4+x^2}dx$

$$\int \ln(4+x^2)\,dx = x\ln(4+x^2)-\int\frac{2x^2}{4+x^2}dx = x\ln(4+x^2)-\int\left(2-\frac{8}{4+x^2}\right)dx$$

$$= x\ln(4+x^2)-2x+8\cdot\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}+C = x\ln(4+x^2)-2x+4\arctan\frac{x}{2}+C$$

(e) $\int \sin^3 2\theta\sqrt{\cos 2\theta}\,d\theta = -\frac{1}{2}\int (1-\cos^2 2\theta)(\cos 2\theta)^{1/2}(-2\sin 2\theta)\,d\theta$

$= \frac{1}{2}\int \left[(\cos 2\theta)^{5/2} - (\cos 2\theta)^{1/2}\right](-2\sin 2\theta)\,d\theta$

$= \frac{1}{7}(\cos 2\theta)^{7/2} - \frac{1}{3}(\cos 2\theta)^{3/2} + C$

(f) $\int \frac{9x^2+2}{3x^3+x}dx = \int \frac{9x^2+2}{x(3x^2+1)}dx$

$\frac{9x^2+2}{x(3x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{3x^2+1}$

$9x^2+2 = A(3x^2+1) + (Bx+C)x = (3A+B)x^2 + Cx + A$

$\rightarrow A = 2,\ B = 3,\ C = 0$

$\int \frac{9x^2+2}{3x^3+x}dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{3x}{3x^2+1}\right)dx = 2\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|3x^2+1| + C$

2. Let $x = \sin\theta$. Then, $dx = \cos\theta\,d\theta$ and $\sqrt{1-x^2} = \cos\theta$

$x = 0 \rightarrow \theta = 0,\ x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

$\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}}dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^2\theta}{\cos^3\theta}\cos\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/3} \tan^2\theta\,d\theta = \int_0^{\pi/3} (\sec^2\theta - 1)\,d\theta$

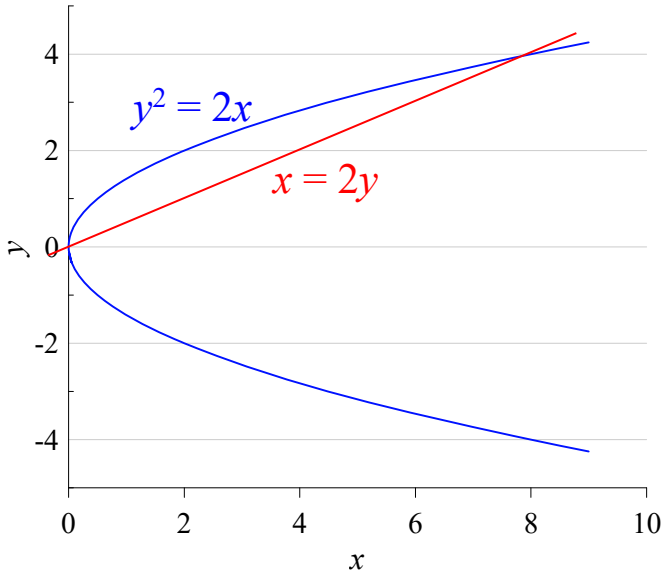
$= \left[\tan\theta - \theta\right]_0^{\pi/3} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

國立雲林科技大學 107 學年度第二學期工學院微積分統一會考

標準答案試算表

No. 3

3. 求以 $y^2=2x$ 及 $x=2y$ 的圖形為界的區域對 y-軸旋轉所得旋轉體的體積。



兩條曲線的交點為 (0, 0); (8, 4)

垂直於 y 軸的環形橫切面面積： $A(y)=\pi(2y)^2-\pi\left(\frac{y^2}{2}\right)^2=\pi\left(4y^2-\frac{1}{4}y^4\right)$

$$V=\int_0^4 A(y)dy=\pi\int_0^4\left(4y^2-\frac{1}{4}y^4\right)dy=\pi\left(\frac{4}{3}y^3-\frac{1}{20}y^5\right)_0^4=\pi\left(\frac{256}{3}-\frac{1024}{20}\right)$$

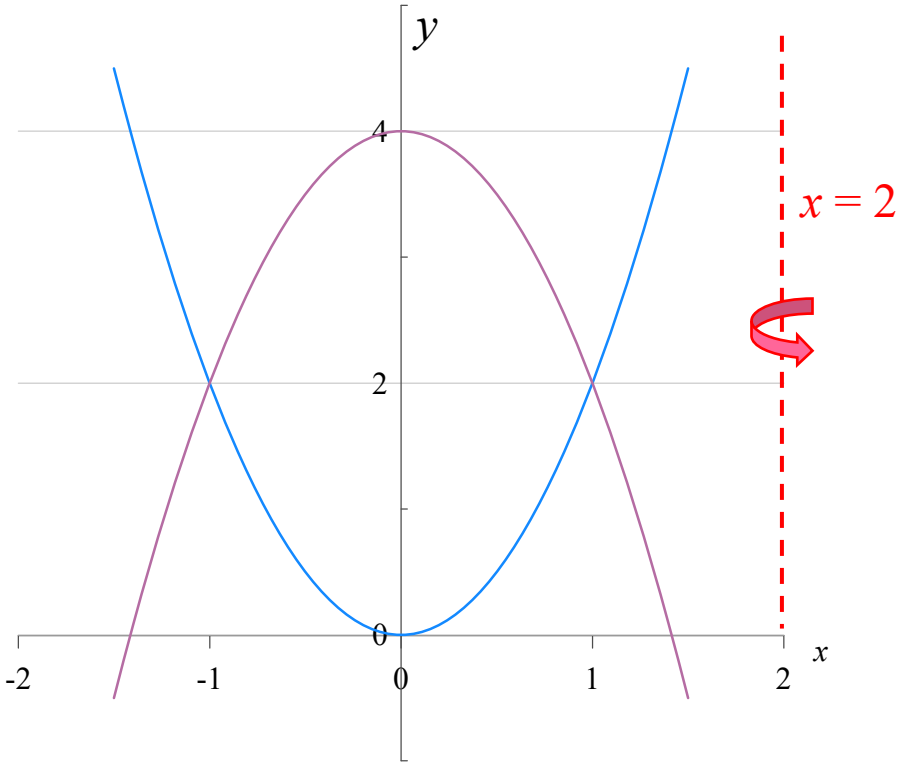
$$=\pi\left(\frac{256}{3}-\frac{256}{5}\right)=\frac{512}{15}\pi$$

國立雲林科技大學 107 學年度第二學期工學院微積分統一會考

標準答案試算表

No. 4

4. 求以 $y=2x^2$ 及 $y=4-2x^2$ 的圖形為界的區域對 $x=2$ 旋轉所得旋轉體的體積。



兩條曲線相交點：(−1, 2), (1, 2)

需用圓柱殼法求體積：V = (周長)·(高)·(厚度)

$$V=\int_{-1}^{1}2\pi(2-x)\left[(4-2x^2)-(2x^2)\right]dx$$

$$=2\pi\int_{-1}^{1}(x-2)(4x^2-4)dx=8\pi\int_{-1}^{1}(x-2)(x^2-1)dx$$

$$=8\pi\int_{-1}^{1}(x^3-2x^2-x+2)dx$$

$$=8\pi\cdot\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right)_{-1}^{1}$$

$$=8\pi\cdot\left(-\frac{4}{3}+4\right)=\frac{64}{3}\pi$$

國立雲林科技大學 107 學年度第二學期工學院微積分統一會考

標準答案試算表

No. 5

5. 求 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 的圖形在 $0\le x\le\sqrt{3}$ 的弧長。

$y=\frac{x^2}{2}+2 \Rightarrow y'=x \Rightarrow 1+(y')^2=1+x^2$

$\Rightarrow L=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+x^2}\,dx$

令 $x=\tan\theta \Rightarrow dx=\sec^2\theta d\theta$　　$x=0 \Rightarrow \theta=0$

$x=\sqrt{3} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow L=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{1+\tan^2\theta}\sec^2\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec^3\theta d\theta$

$=\frac{1}{2}\left[\sec\theta\tan\theta+\ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3}+\frac{1}{2}\cdot\left[\ln(2+\sqrt{3})-\ln(1+0)\right]$

$=\sqrt{3}+\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3})$

國立雲林科技大學 107 學年度第二學期工學院微積分統一會考

標準答案試算表

No. 6

6. 求極限 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$，其中 a 是一個常數。

The limit has the form 1^∞. $y=\left(1+\frac{a}{x}\right)^x \Rightarrow \ln y = x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty} \underbrace{x\cdot\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}_{\infty\cdot 0} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \quad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+a/x}\cdot -ax^{-2}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{a}{1+a/x} = a\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+a/x} = a$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} e^{\ln y} = e^{\lim_{x\to\infty}\ln y} = e^a$$

7. 求瑕積分 $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x}dx$。

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x(x+1)}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left[\ln|x|-\ln|x+1|\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}\left[\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}\left[\ln\left(\frac{t}{t+1}\right)-\ln\frac{1}{2}\right]$$

$$= 0-\ln\frac{1}{2} = \ln 2$$